

На правах рукописи



Спивак Юлия Эдуардовна

**ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧ ДИЗАЙНА УСТРОЙСТВ МАСКИРОВКИ
ДЛЯ МОДЕЛЕЙ МАГНИТОСТАТИКИ**

1.2.2 — Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Владивосток — 2023

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук и Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Дальневосточный федеральный университет».

Научный руководитель: **Алексеев Геннадий Валентинович**,
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Масловская Анна Геннадьевна**,
доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического анализа и моделирования, ФГБОУ ВО «Амурский государственный университет», г. Благовещенск

Петров Павел Сергеевич,
доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией геофизической гидродинамики, ФГБУН Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН, г. Владивосток

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Хабаровский Федеральный исследовательский центр Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Хабаровск

Защита состоится «9» июня 2023 г. в 10⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета Д 24.1.027.01 на базе Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН по адресу: 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 5.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН и на сайте: https://www.iacr.dvo.ru/resources/fileman/Uploads/dissertations/Spivak/Spivak_YE_diss.pdf

Автореферат разослан «___» _____ 2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 24.1.027.01,
кандидат технических наук



Петрунко Н.Н.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень разработанности темы. Актуальность тематики исследования в диссертационной работе¹ вытекает, с одной стороны, из новизны, важности и сложности рассматриваемых в диссертации математических и прикладных задач, а, с другой стороны, – из возможности приложения полученных результатов в ряде важных прикладных областей. В качестве некоторых из них можно отметить задачи маскировки материальных тел, задачи дизайна медицинских магнитно-чувствительных устройств, магнитно-резонансная томография (МРТ), транскраниальная магнитная стимуляция (ТМС), задачи проектирования устройств беспроводной передачи энергии и данных.

В последние годы стало бурно развиваться новое направление в теории обратных задач для уравнений электромагнетизма и акустики, связанное с решением важных прикладных задач, возникающих при создании невидимых или нерассеивающих пространственных структур, делающих любой расположенный внутри указанной пространственной структуры объект невидимым для электромагнитных или акустических волн. Первые результаты по данной проблеме, опубликованные в работах [J.V. Pendry et al., 2006] и [U. Leonhardt, 2006], были посвящены исследованию проблем электромагнитной невидимости. Указанные авторы разработали оригинальный математический метод, названный ими методом координатных преобразований (МКП), решения задач дизайна устройств невидимости в виде объемных оболочек, служащих для маскировки материальных тел от их обнаружения средствами электромагнитной локации.

Но нужно отметить, что полученные с помощью МКП решения задач маскировки обладают рядом существенных недостатков. Основной их недостаток связан с практической невозможностью технической реализации полученных с помощью МКП решений. С учетом того, что задачи маскировки относятся к обратным задачам, некоторые исследователи, начиная с 2009 г., стали применять для решения задач дизайна маскировочных оболочек оптимизационный метод, идея применения которого для решения обратных задач впервые была предложена в фундаментальных работах академика А.Н. Тихонова в 60-е годы 20-го века.

Подчеркнем, что в первых работах [B.I. Pora, S.A. Cummer, 2009] и [S. Xi, 2009] по применению оптимизационного метода для решения задач маскировки использовались соответственно итерационный алгоритм Бройдена-Флетчера- Гольдфарба-Шанно (L-BFGS-B алгоритм) и генетический алгоритм. В дальнейшем, наряду с генетическим алгоритмом, стали использоваться и методы глобальной оптимизации, типа метода роя частиц, а начиная с работы [J. Andkjaer, O. Sigmund, 2011], и метод топологической оптимизации (см. [I. Peralta et al., 2017], [V.D. Fichinotti, et al., 2018]).

¹Исследование выполнено при поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90039 “Аспиранты”; при поддержке Российского научного фонда № 22-21-00271.

В настоящее время оптимизационное направление в теории невидимости продолжает активно развиваться, в том числе и в работах научного руководителя Г.В. Алексеева и его учеников. Отметим также работы [В.Г. Романов, 2010], [В.Г. Романов, Ю.А. Чиркунов, 2013], [Д.С. Аниконов, И.В. Прохоров, 2006], в которых развиваются альтернативные подходы к решению задач маскировки в акустике и рентгеновской томографии.

Целью диссертационной работы является теоретическое исследование краевых задач для двумерных и трехмерных моделей магнитостатики, рассматриваемых при условиях сопряжения на границах неоднородных анизотропных в общем случае сред; разработка, анализ и программная реализация эффективных численных алгоритмов решения задач дизайна устройств маскировки для 2D и 3D моделей магнитостатики на основе оптимизационного метода и метода роя частиц.

Для реализации изложенной цели и получения новых научных результатов необходимо решить следующие **задачи**:

- исследовать теоретические вопросы, связанные с доказательством однозначной разрешимости прямых краевых задач для 2D и 3D моделей магнитостатики;

- разработать математический аппарат, основанный на оптимизационном методе, для решения обратных задач для 2D и 3D моделей магнитостатики, рассматриваемых при условиях сопряжения на границах неоднородных анизотропных в общем случае сред;

- разработать эффективные численные алгоритмы решения экстремальных задач для 2D и 3D моделей магнитостатики, основанные на использовании метода роя частиц. Исследовать свойства разработанных алгоритмов, выполнить их программную реализацию и тестирование;

- выполнить и проанализировать вычислительные эксперименты, направленные на решение задач дизайна маскировочных или экранирующих устройств, обеспечивающих невидимость или экранирование материальных тел относительно статических магнитных полей.

Научная новизна заключается в получении фундаментальных результатов при теоретическом и численном анализе ряда новых задач, возникающих при решении задач дизайна устройств невидимости и экранирования для моделей магнитостатики:

1. Доказаны теоремы об однозначной разрешимости новых краевых задач для двумерных и трехмерных моделей магнитостатики.

2. Разработан математический аппарат решения задач дизайна средств маскировки и экранирования материальных тел относительно магнитных полей, основанный на оптимизационном методе решения обратных задач.

3. Установлен аналог свойства релейности для оптимальных решений задач экранирования и маскировки.

4. Предложены, исследованы и реализованы эффективные численные алгоритмы решения задач дизайна устройств маскировки и экранирования для 2D и 3D моделей магнитостатики.

5. Разработан комплекс программ, реализующих предложенные численные алгоритмы в пакете Matlab. Проведены вычислительные эксперименты по решению задач дизайна устройств маскировки и экранирования для 2D и 3D моделей магнитостатики, демонстрирующие высокую точность и эффективность предложенных алгоритмов.

6. Построенные в диссертации оптимальные решения при надлежащем выборе множества управлений отвечают высокоэффективным маскировочным и экранирующим устройствам, обладающим простотой технической реализации.

Методология и методы исследования. Для решения поставленных задач использованы методы математического и средства компьютерного моделирования. Теоретическое исследование краевых задач для 2D и 3D моделей магнитостатики, рассматриваемых при условиях сопряжения на границах раздела неоднородных анизотропных в общем случае сред, основывается на использовании теоремы Лакса-Мильграма. Исследование обратных задач для 2D и 3D моделей магнитостатики, возникающих при разработке технологий дизайна средств маскировки и экранирования материальных тел относительно статических магнитных полей, основывается на оптимизационном методе. В результате исходная обратная задача сводится к многопараметрической экстремальной задаче, в которой роль управлений играют магнитные проницаемости изотропных или анизотропных сред, заполняющих круговые или сферические слои, составляющие маскировочное устройство. Для численного решения полученных экстремальных задач используется метод роя частиц. Программная реализация разработанных алгоритмов выполнена с помощью пакета прикладных программ Matlab, в частности для решения систем линейных алгебраических уравнений были использованы встроенные в пакет Matlab функции.

Теоретическая и практическая значимость. В диссертации предложен оригинальный метод решения задач дизайна устройств невидимости и экранирования материальных тел для моделей магнитостатики. Разработанный метод фактически представляет собой математическую технологию решения задач дизайна устройств экранирования и маскировки. Указанная технология может также использоваться для решения задач дизайна концентраторов энергии, устройств иллюзиона, инверторов и других специальных устройств, служащих для управления физическими полями. В этом состоит ее научная значимость. Результаты, полученные при решении задач дизайна устройств магнитной невидимости, могут найти потенциальные применения в таких медицинских технологиях, в которых используемые магнитные поля должны иметь заданную структуру и не допускать возмущений различного рода присутствующими магнитными объектами. Примерами таких технологий являются магнитно-резонансная томография и транскраниальная магнитная стимуляция.

Основные положения, выносимые на защиту.

Результаты настоящей работы, дополняющие и обобщающие выводы, полученные в публикациях отечественных и зарубежных исследователей,

являются новыми и состоят в следующем:

1. Доказательство однозначной разрешимости новых краевых задач для двумерных и трехмерных моделей магнитостатики.

2. Математический аппарат, основанный на оптимизационном методе, исследования обратных задач для двумерных и трехмерных моделей магнитостатики, возникающих при разработке технологий дизайна средств маскировки и экранирования материальных тел относительно статических магнитных полей.

3. Разработка эффективных численных алгоритмов решения экстремальных задач для 2D и 3D моделей магнитостатики, основанных на использовании метода роя частиц.

4. Комплекс программ, реализующих разработанные численные алгоритмы, основанные на оптимизационном методе и методе роя частиц, позволяющих эффективно численно решать обратные экстремальные задачи дизайна устройств маскировки и экранирования для 2D и 3D моделей магнитостатики.

Достоверность полученных результатов, положений и выводов диссертационной работы обеспечивается использованием строгих математических рассуждений при доказательстве сформулированных в главе 1 теорем, прозрачной аргументацией принятых ограничений, применением апробированных численных методов и средств компьютерного моделирования и верификацией построенных алгоритмов, а также сравнительным анализом полученных результатов.

Апробация работы. Основные результаты диссертационного исследования регулярно докладывались и обсуждались на научных семинарах Института прикладной математики ДВО РАН и Департамента математического и компьютерного моделирования Института математики и компьютерных технологий Дальневосточного федерального университета. Кроме того, результаты работы были представлены самостоятельно и с соавторами на: 11 международных, 3 всероссийских и 2 региональных конференциях, в том числе на 5-ой Международной конференции “Pacific Rim Underwater Acoustics Conference (PRUAC)” в 2015 г. (г. Владивосток, Россия), Международной конференции “International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)” в 2016 г. (г. Кэрнс, Австралия), в 2017 г. (г. Верона, Италия) и в 2019 г. (г. Гранада, Испания), 9-ой Международной конференции “Discrete Optimization and Operations Research and Scientific School (DOOR)” в 2016 г. (г. Владивосток, Россия), Международном симпозиуме “Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS)” в 2017 г. (г. Санкт-Петербург, Россия) и в 2018 г. (г. Тояма, Япония), Всероссийской конференции “Нелинейные волны: теория и новые приложения” в 2016 г. (г. Новосибирск, Россия), Международной конференции “Математическое моделирование в электродинамике: теория, методы и приложения” в 2019 г. (г. Пенза, Россия), Всероссийской научно-технической конференции “Технические проблемы освоения мирового океана (ТПОМО)” в 2017 и 2019 гг. (г. Владивосток, Россия), Региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых

учёных по естественным наукам в 2016 и 2019 гг. (г. Владивосток), Международной конференции по промышленному инжинирингу и современным технологиям (FarEastCon) в 2020 и 2021 гг. (г. Владивосток, Россия).

Связь работы с научными темами и программами. Основные результаты диссертационной работы были получены автором при проведении исследований, выполненных в рамках научных тем: государственное задание ИПМ ДВО РАН (тема № 075-01095-20-00) в 2020–2022 гг.; проект № 19-31-90039 “Аспиранты”, получивший поддержку РФФИ по результатам конкурсного отбора научных проектов, выполняемых молодыми учеными, обучающимися в аспирантуре, в 2019–2021 гг.; Дальневосточный центр математических исследований при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашения № 075-02-2021-1395 от 01.06.2021 и № 075-02-2022-880 от 31.01.2022) в 2021–2022 гг.; грант РНФ № 22-21-00271 в 2022 г.

Личный вклад. Рассматриваемые в работе задачи были поставлены научным руководителем. Все результаты, изложенные в диссертации, были получены при непосредственном участии соискателя Ю.Э. Спивак на всех этапах исследования. Работы [4, 15, 22, 23, 25, 26, 32] автором выполнены полностью самостоятельно. В статьях [1-3, 9-13] совместно с соавторами соискатель доказала однозначную разрешимость рассматриваемых задач. Автору принадлежит существенная часть в разработке численных алгоритмов решения обратных экстремальных задач маскировки для двумерных и трехмерных моделей магнитостатики [5, 6, 14, 16-20] и для других моделей [7, 8, 21, 24, 27]. В [28-31] с соавторами разработан комплекс численных алгоритмов и программ, в которых соискатель выполняла их программную реализацию, анализ и вычислительные эксперименты по нахождению решений рассматриваемых задач. Автор самостоятельно выполнила описанные в диссертации численные эксперименты, осуществила визуализацию и анализ полученных результатов.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 27 научных работах, из них 6 статей в журналах, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России; 15 материалов конференций в изданиях, индексируемых международными базами научного цитирования Scopus и Web of Science; 6 публикаций в сборниках материалов и тезисов конференций, индексируемых в РИНЦ; получены 5 свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 103 страницы, включая 8 рисунков и 22 таблицы; список литературы содержит 123 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной

литературы по изучаемой проблеме, формулируются цель и научные задачи исследования, излагаются основные результаты работы, выносимые на защиту, определяется научная новизна и практическая значимость работы.

Первая глава посвящена анализу разрешимости граничных задач сопряжения для двумерной и трехмерной моделей магнитостатики, рассматриваемых в неограниченном пространстве. В **разд. 1.1** напоминаются граничные условия сопряжения и дифференциальные уравнения, образующие модель магнитостатики.

Разд. 1.2 начинается с постановки в плоскости \mathbb{R}^2 задачи сопряжения, отвечающей области Ω , имеющей в полярных координатах (r, θ) вид кольца $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : a < r = |\mathbf{x}| < b\}$, где a и b – положительные константы. Считается, что область Ω заполнена неоднородной анизотропной, в общем случае, средой, магнитные свойства которой описываются тензором магнитной проницаемости $\boldsymbol{\mu}$, тогда как внутренность $\Omega_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < a\}$ и внешность $\Omega_e^\infty = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| > b\}$ области Ω заполнены одной и той же однородной изотропной средой с постоянной магнитной проницаемостью $\mu_0 > 0$. На пару $(\Omega, \boldsymbol{\mu})$ ниже будем ссылаться как на магнитную оболочку.

Предполагается, что вне некоторого круга $B_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < R\}$ радиуса R , содержащего область Ω внутри себя, сосредоточены источники, создающие в B_R внешне приложенное магнитное поле $\mathbf{H}_a = -\nabla\Phi_a$, отвечающее потенциалу Φ_a . Наличие оболочки $(\Omega, \boldsymbol{\mu})$ приводит к появлению дополнительного поля Φ_s во внешности Ω_e^∞ , а также (полного) поля Φ_0 в области Ω и (полного) поля Φ_i в области Ω_i (см. рис. 1). Указанные поля Φ_i , Φ_0 и Φ_s являются решением задачи сопряжения:

$$\mu_0 \Delta \Phi_i = 0 \text{ в } \Omega_i, \operatorname{div}(\boldsymbol{\mu} \nabla \Phi_0) = 0 \text{ в } \Omega, \mu_0 \Delta \Phi_s = 0 \text{ в } \Omega_e^\infty, \quad (1)$$

$$\Phi_i = \Phi_0, \mu_0 \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = (\boldsymbol{\mu} \nabla \Phi_0) \cdot \mathbf{n} \text{ при } r = a,$$

$$\Phi_a + \Phi_s = \Phi_0, \mu_0 \frac{\partial (\Phi_a + \Phi_s)}{\partial n} = (\boldsymbol{\mu} \nabla \Phi_0) \cdot \mathbf{n} \text{ при } r = b, \quad (2)$$

$$\Phi_s(\mathbf{x}) = O(1) \text{ при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Для теоретического исследования задачи сопряжения (1)–(3) вводится ряд функциональных пространств. Основную роль играет фактор-пространство $X = H^1(B_R) \setminus \mathbb{R}$ с нормой

$$\|\Phi\|_X^2 = \|\nabla \Phi\|_{\Omega_i}^2 + \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\|_{\Omega}^2 + \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\|_{\Omega}^2 + \|\nabla \Phi\|_{\Omega_e^\infty}^2. \quad (4)$$

Приводится слабая формулировка рассматриваемой задачи сопряжения. Предварительно исходная задача сводится к эквивалентной краевой

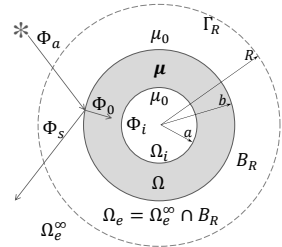


Рис. 1 — Схематическое изображение внешне приложенного магнитного поля и круга B_R , содержащего кольцевую магнитную оболочку $(\Omega, \boldsymbol{\mu})$.

задаче в круге B_R , на границе Γ_R которого ставится нелокальное краевое условие $\partial\Phi_s/\partial n = T\Phi_s$, содержащее оператор Дирихле-Неймана T . Дается понятие слабого решения как тройки $\Phi = (\Phi_i, \Phi_0, \Phi_e) \in X$, где $\Phi_e = \Phi^e + \Phi_s = \Phi_a|_{\Omega_e} + \Phi_s$, удовлетворяющей тождеству

$$a_\mu(\Phi, S) \equiv a_0(\Phi, S) + a(\mu_r, \mu_\theta; \Phi, S) = \langle F, S \rangle \quad \forall S \in X. \quad (5)$$

Здесь и ниже μ обозначает пару (μ_r, μ_θ) ; $a_0(\cdot, \cdot)$, $a(\mu_r, \mu_\theta; \cdot, \cdot)$ и F – билинейные и линейная формы на X , определяемые формулами

$$a_0(\Phi, S) = \mu_0 \int_{\Omega_i \cup \Omega_e} \nabla\Phi \cdot \nabla S d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_R} (T\Phi) S d\sigma, \quad (6)$$

$$a(\mu_r, \mu_\theta; \Phi, S) = \int_{\Omega} \left(\mu_r \frac{\partial\Phi}{\partial r} \frac{\partial S}{\partial r} + \frac{\mu_\theta}{r^2} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \frac{\partial S}{\partial\theta} \right) d\mathbf{x}, \quad (7)$$

$$\langle F, S \rangle = - \int_{\Gamma_R} T\Phi^e S d\sigma + \int_{\Gamma_R} \frac{\partial\Phi^e}{\partial n} S d\sigma. \quad (8)$$

Отметим, что билинейная форма a_μ , введенная в (5), определяет линейный оператор $A_\mu : X \rightarrow X^*$, действующий по формуле

$$\langle A_\mu\Phi, S \rangle = a_\mu(\Phi, S) \equiv a_0(\Phi, S) + a(\mu_r, \mu_\theta; \Phi, S), \quad (9)$$

причем задача (5) эквивалентна операторному уравнению $A_\mu\Phi = F$.

Основной результат **разд. 1.2** сформулирован в теореме 1.

Теорема 1. Пусть выполняются условия:

(i) тензор μ диагонален в полярных координатах r, θ , а его диагональные компоненты μ_r и μ_θ удовлетворяют условиям: $\mu_r \in L_{\mu_r^0}^\infty(\Omega)$, $\mu_\theta \in L_{\mu_\theta^0}^\infty(\Omega)$, $\mu_r^0 = \text{const} > 0$, $\mu_\theta^0 = \text{const} > 0$;

(ii) $\Phi^e \equiv \Phi_a|_{\Omega_e} \in H(\Omega_e) = \{\Phi \in H^1(\Omega_e) : \Delta\Phi = 0\}$.

Тогда для любой пары $\mu = (\mu_r, \mu_\theta) \in L_{\mu_r^0}^\infty(\Omega) \times L_{\mu_\theta^0}^\infty(\Omega)$:

1) оператор $A_\mu : X \rightarrow X^*$, определенный в (9), осуществляет изоморфизм, причем для обратного оператора $A_\mu^{-1} : X^* \rightarrow X$ справедлива оценка $\|A_\mu^{-1}\| \leq C_1 \equiv (1/\bar{\mu})$, где $\bar{\mu} = \min(\mu_0, \mu_r^0, \mu_\theta^0)$;

2) для любого поля $\Phi^e \in H(\Omega_e)$ задача (5) имеет единственное решение $\Phi_\mu \in X$, для которого справедлива оценка $\|\Phi_\mu\|_X \leq C_2 \|\Phi^e\|_{1, \Omega_e}$ с константой $C_2 = C_0 C_1$ (где $C_0 = \max[\mu_0 + C_T C_R^2, (C_T C_R + C'_R) C_R]$), не зависящей от (μ_r, μ_θ) . Смысл констант C_T, C_R и C'_R см. в разд. 1.2.

Разд. 1.3 начинается с постановки в пространстве \mathbb{R}^3 трехмерной задачи сопряжения, отвечающей области Ω , имеющей в сферических координатах (r, θ, φ) вид сферического слоя $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : a < r = |\mathbf{x}| < b\}$, где a и b – положительные константы. Предполагается, что вне шара $B_R = \{|\mathbf{x}| < R\}$ радиуса R , содержащего область Ω внутри себя, сосредоточены источники, создающие в B_R внешне приложенное магнитное поле $\mathbf{H}_a = -\nabla\Phi_a$, отвечающее потенциалу Φ_a . Наличие оболочки (Ω, μ) приводит к появлению полей Φ_i и Φ_0 в областях Ω_i и Ω и дополнительного поля Φ_s в Ω_e^∞ (см. рис. 2). Указанные поля Φ_i, Φ_0 и Φ_s являются решением трехмерного аналога уравнений (1)–(2) при следующем условии на бесконечности:

$$\Phi_s(\mathbf{x}) = o(1) \quad \text{при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Для теоретического исследования задачи сопряжения (1)–(2), (10)

вводится ряд функциональных пространств. Основную роль играет подпространство $X \equiv \mathcal{H}^1(B_R) \setminus \mathbb{R}$ пространства $H^1(B_R)$, состоящее из функций, не зависящих от угла φ , с трехмерным аналогом нормы (4).

Приводится слабая формулировка рассматриваемой задачи сопряжения (1)–(2), (10). Предварительно исходная задача сводится к эквивалентной краевой задаче в шаре B_R , на границе Γ_R которого ставится краевое условие $\partial\Phi_s/\partial n = T\Phi_s$, содержащее оператор Дирихле-Неймана T . Дается понятие слабого решения как тройки $\Phi = (\Phi_i, \Phi_0, \Phi_e) \in X$, где $\Phi_e = \Phi^e + \Phi_s = \Phi_a|_{\Omega_e} + \Phi_s$, удовлетворяющей тождеству

$$a_\mu(\Phi, S) \equiv a_0(\Phi, S) + a(\mu_r, \mu_\theta; \Phi, S) = \langle F, S \rangle \quad \forall S \in X. \quad (11)$$

Здесь и ниже $\mu = (\mu_r, \mu_\theta)$, а $a_0(\cdot, \cdot)$, $a(\mu_r, \mu_\theta; \cdot, \cdot)$ и F определяются трехмерными аналогами формул (6)–(8), соответственно. Используя трехмерный аналог формулы (9), тождество (11) можно представить в эквивалентном виде операторного уравнения $A_\mu\Phi = F$.

Основной результат **разд. 1.3** сформулирован в теореме 2.

Теорема 2. Пусть выполняются условия:

(i) тензор μ диагонален в сферических координатах r, θ, φ , а его диагональные компоненты (радиальная, полярная и азимутальная магнитные проницаемости) μ_r, μ_θ и μ_φ не зависят от угла φ и удовлетворяют условиям: $\mu_r \in L^\infty_{\mu_r^0}(\Omega)$, $\mu_\theta \in L^\infty_{\mu_\theta^0}(\Omega)$, $\mu_r^0 = \text{const} > 0$, $\mu_\theta^0 = \text{const} > 0$, $\mu_\varphi = \mu_\theta$;

(ii) $\Phi^e \equiv \Phi_a|_{\Omega_e} \in \mathcal{H}(\Omega_e) \subset H(\Omega_e) = \{\Phi \in H^1(\Delta; \Omega_e) : \Delta\Phi = 0\}$.

Пусть $K_1 \subset L^\infty_{\mu_r^0}(\Omega)$ и $K_2 \subset L^\infty_{\mu_\theta^0}(\Omega)$ – произвольные непустые множества. Тогда для любой пары $\mu = (\mu_r, \mu_\theta) \in K_1 \times K_2$:

1) оператор $A_\mu : X \rightarrow X^*$, определенный в (9), осуществляет изоморфизм, а для обратного оператора $A_\mu^{-1} : X^* \rightarrow X$ справедлива оценка $\|A_\mu^{-1}\| \leq C_1 \equiv (1/\bar{\mu})$, где $\bar{\mu} = \min(\mu_0, \mu_r^0, \mu_\theta^0)$;

2) для любого поля $\Phi^e \in \mathcal{H}(\Omega_e)$ задача (11) имеет единственное решение $\Phi_\mu \in X$, для которого справедлива оценка $\|\Phi_\mu\|_X \leq C_2 \|\Phi^e\|_{1, \Omega_e}$, с константой $C_2 = C_0 C_1$ (где $C_0 = \max[\mu_0 + C_T C_R^2, (C_T C_R + C'_R) C_R]$), не зависящей от (μ_r, μ_θ) . Смысл констант C_T, C_R и C'_R см. в разд. 1.3.

В главе 2 численно исследуются обратные задачи дизайна многослойных экранирующих и маскировочных устройств для 2D модели магнитостатики в случае однородного внешне приложенного магнитного поля $\mathbf{H}_a = -\nabla\Phi_a$. Рассматривается физический сценарий, когда в плоскость \mathbb{R}^2 , заполненную однородной изотропной средой с магнитной проницаемостью $\mu_0 > 0$, вносится магнитная оболочка (Ω, μ) , имеющая в полярных

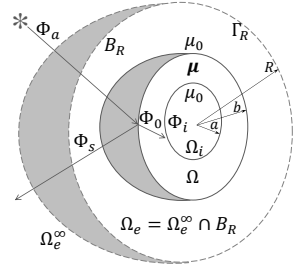


Рис. 2 — Схематическое изображение внешне приложенного магнитного поля и шара B_R , содержащего сферическую магнитную оболочку (Ω, μ) .

координатах (r, θ) форму кольца $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : a < r = |\mathbf{x}| < b\}$, где a, b – положительные константы, а μ – относительная магнитная проницаемость изотропной среды, заполняющей Ω . Вводятся два множества: $\Omega_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < a\}$ и $\Omega_e^\infty = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| > b\}$. Предполагается, что оболочка (Ω, μ) состоит из конечного числа колец $\Omega_m = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : R_{m-1} < r = |\mathbf{x}| < R_m\}$, $m = \overline{1, M}$, одинаковой ширины $d = (b - a)/M$, $R_0 = a$, $R_M = b$ (см. рис. 3). Каждый из слоев Ω_m заполнен однородной изотропной средой с постоянной магнитной проницаемостью μ_m , $m = \overline{0, M+1}$. Пусть Φ_m – сужение $\Phi|_{\Omega_m}$ полного поля $\Phi = \Phi_a + \Phi_s$ на подобласть Ω_m , $m = \overline{0, M}$. Положим $\Phi_{M+1} = \Phi|_{\Omega_e^\infty}$. Тогда прямая задача нахождения полного поля $\Phi = \Phi_a + \Phi_s$ сводится к нахождению $M+2$ полей Φ_m в областях Ω_m , $m = \overline{0, M}$, и Φ_s в Ω_e^∞ , путем решения задачи магнитного сопряжения:

$$\Delta \Phi_0 = 0 \text{ в } \Omega_0, \quad \operatorname{div}(\mu_m \nabla \Phi_m) = 0 \text{ в } \Omega_m, \quad \Delta \Phi_s = 0 \text{ в } \Omega_e^\infty, \quad (12)$$

$$\Phi_m = \Phi_{m+1}, \quad \mu_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial r} = \mu_{m+1} \frac{\partial \Phi_{m+1}}{\partial r} \text{ при } r = R_m, \quad m = \overline{0, M}, \quad (13)$$

$$\Phi_0(\mathbf{x}) = O(1) \text{ при } r = |\mathbf{x}| \rightarrow 0, \quad \Phi_s(\mathbf{x}) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Пусть $\Phi[\mathbf{m}] = (\Phi_0[\mathbf{m}], \Phi_1[\mathbf{m}], \dots, \Phi_M[\mathbf{m}], \Phi_{M+1}[\mathbf{m}])$ – решение прямой задачи сопряжения (12)–(14), отвечающей M -мерному вектору $\mathbf{m} = (\mu_1, \dots, \mu_M)$, составленному из компонент μ_m магнитных проницаемостей слоев Ω_m , $m = \overline{1, M}$. Указанное решение можно представить в виде

$$\Phi_0(r, \theta) = A_0 r \cos \theta \text{ в } \Omega_0, \quad (15)$$

$$\Phi_m(r, \theta) = (A_m r + B_m/r) \cos \theta \text{ в } \Omega_m, \quad m = \overline{1, M}, \quad (16)$$

$$\Phi_{M+1}(r, \theta) = (-H_a r + B_{M+1}/r) \cos \theta \text{ в } \Omega_e^\infty. \quad (17)$$

Здесь константы A_0, A_m, B_m, B_{M+1} , $m = \overline{1, M}$ определяются из условий (13), имеющих вид системы $2(M+1)$ линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} -R_0^2 A_0 + R_0^2 A_1 + B_1 &= 0, & -\mu_0 R_0^2 A_0 + \mu_1 R_0^2 A_1 - \mu_1 B_1 &= 0, \\ R_m^2 A_m - R_m^2 A_{m+1} + B_m - B_{m+1} &= 0, & m &= \overline{2, M-1}, \\ \mu_m R_m^2 A_m - \mu_{m+1} R_m^2 A_{m+1} - \mu_m B_m + \mu_{m+1} B_{m+1} &= 0, \\ -R_M^2 A_M - B_M + B_{M+1} &= H_a R_M^2, \\ -\mu_M R_M^2 A_M + \mu_M B_M - \mu_{M+1} B_{M+1} &= \mu_{M+1} H_a R_M^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Общая обратная задача магнитной маскировки состоит в нахождении вектора \mathbf{m} , исходя из выполнения двух независимых условий (см.¹):

$$\begin{aligned} \nabla \Phi_0[\mathbf{m}] &= 0, \quad (\text{т.е. } \Phi_0[\mathbf{m}] = \text{const}) \text{ в } \Omega_0, \\ \Phi_{M+1}[\mathbf{m}] &= \Phi_a|_{\Omega_{M+1}}, \quad (\text{т.е. } \Phi_s[\mathbf{m}] = 0) \text{ в } \Omega_{M+1} \equiv \Omega_e^\infty \cap B_R. \end{aligned} \quad (19)$$

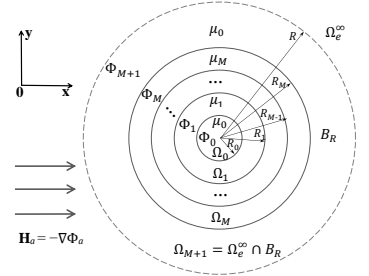


Рис. 3 – Геометрия 2D слоистой маскировочной изотропной оболочки и схематическое распределение магнитного поля.

¹Алексеев, Г. В. Анализ и оптимизация в задачах дизайна устройств невидимости материальных тел / Г. В. Алексеев, В. А. Левин, Д. А. Терешко. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2021. 328 с.

Здесь B_R – круг достаточно большого радиуса R , содержащий Ω внутри себя. Частный случай нахождения вектора проницаемостей \mathbf{m} из первого условия (19) определяет задачу экранирования (или задачу внутренней маскировки), в то время как нахождение \mathbf{m} из второго условия в (19) отвечает задаче внешней маскировки.

В частном случае, когда число слоев M равно 2, существует точное решение (μ_1^*, μ_2^*) задачи маскировки (19), где $\mu_1^* = 0$, $\mu_2^* = \mu_0(R_2^2 + R_1^2)/(R_2^2 - R_1^2)$, обеспечивающее точное выполнение условий маскировки, а соответствующая бислойная оболочка обладает идеальным маскировочным эффектом. Однако его техническая реализация невозможна из-за отсутствия легко доступных материалов с нулевой магнитной проницаемостью. В виду этого в диссертации разрабатывается эффективный численный алгоритм нахождения приближенных решений задачи маскировки, допускающих простую техническую реализацию. Для реализации этой цели применяется оптимизационный метод, в соответствии с которым вводят множество управлений K и два функционала качества по формулам:

$$K = \{\mathbf{m} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M) \in \mathbb{R}^M : 0 < \mu_{min} \leq \mu_m \leq \mu_{max}\}, \quad (20)$$

$$J_i(\mathbf{m}) = \frac{\|\nabla\Phi_0[\mathbf{m}]\|_{L^2(\Omega_0)}}{\|\nabla\Phi_a\|_{L^2(\Omega_0)}}, \quad J_e(\mathbf{m}) = \frac{\|\Phi_{M+1}[\mathbf{m}] - \Phi_a\|_{L^2(\Omega_{M+1})}}{\|\Phi_a\|_{L^2(\Omega_{M+1})}}. \quad (21)$$

Здесь константы μ_{min} и μ_{max} определяют нижнюю и верхнюю границы множества K . Формулируются следующие экстремальные задачи:

$$J_i(\mathbf{m}) \rightarrow \inf, \quad \mathbf{m} \in K, \quad (22)$$

$$J(\mathbf{m}) = (1/2)[J_i(\mathbf{m}) + J_e(\mathbf{m})] \rightarrow \inf, \quad \mathbf{m} \in K. \quad (23)$$

Для численного решения задач (22) и (23) используется метод роя частиц (МРЧ) по схеме, детально описанной в разд. 2.4 диссертации.

Численное моделирование проводилось при следующих значениях параметров: радиусы оболочки a, b и R круга $B_R : a \equiv R_0 = \{0.01, 0.04\}$ м, $b \equiv R_M = 0.05$ м, $R = \{0.1, 3\}$ м; магнитная проницаемость сред в областях Ω_0, Ω_{M+1} : $\mu_0 = \mu_{M+1} = 1$; пары значений для границ μ_{min} и μ_{max} множества управлений K : $(10^{-n}; 10)$, $(0.0045; 40)$, $(0.0045; 70)$, $(0.08, 20)$, $(0.02, 50)$. Кроме того, d – ширина слоев, N – количество частиц (размер роя), L – количество итераций, заданное магнитное поле: $d = (b - a)/M$, $N = 25$, $L = 120$, $\mathbf{H}_a = -\nabla\Phi_a$, где $\Phi_a(r, \theta) = -H_a r \cos \theta$, $H_a = |\mathbf{H}_a| = 1$ А/м.

Первый численный эксперимент (тест 1) служит для оценки точности и эффективности разработанного алгоритма. Он относится к точному решению задачи маскировки (19) для случая двухслойной изотропной оболочки ($M = 2$), имеющему при $a=0.01$ м, $b=0.05$ м вид: $\mu_1^*=0$, $\mu_2^* = \mu_0(R_2^2 + R_1^2)/(R_2^2 - R_1^2) = 2.125$. Тест 1 заключался в численном решении двухпараметрической экстремальной задачи (23) с помощью МРЧ для пары $\mu_{min}=10^{-n}$, $n=\overline{1,10}$ и $\mu_{max}=10$, и сравнении полученных результатов с точным решением. Указанное сравнение показало (см. разд. 2.1), что с уменьшением нижней границы μ_{min} множества K от 10^{-1} до 10^{-10} , чему соответствует увеличение контраста μ_{max}/μ_{min} от 100 до 10^{11} , оптимальное

решение $(\mu_1^{opt}, \mu_2^{opt})$ задачи маскировки (19) стремится к точному решению $(\mu_1^*, \mu_2^*) = (0, 2.125)$. При этом значение $J(\mathbf{m}^{opt})$, где $\mathbf{m}^{opt} = (\mu_1^{opt}, \mu_2^{opt})$, изменяется от $1.43 \cdot 10^{-1}$ при $\mu_{min} = 10^{-1}$ до значения $1.65 \cdot 10^{-10}$ при $\mu_{min} = 10^{-10}$, отвечающего очень высокой маскировочной эффективности оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{opt})$. Это подтверждает высокую точность используемого метода для решения задачи (19).

Тесты 2 и 3 относятся к задаче экранирования для пары $\mu_{min} = 0.0045$, $\mu_{max} = 40$, и к задаче маскировки для пары $\mu_{min} = 0.0045$, $\mu_{max} = 70$. Полученные результаты описаны в разд. 2.4 диссертации и приведены в табл. 1 и 2. Основной результат состоит в том, что для оптимальных решений 2D задачи экранирования (22) справедлив аналог свойства релейности относительно пары (μ_{min}, μ_{max}) , означающий выполнение соотношений: $\mu_1^{opt} = \mu_3^{opt} = \dots = \mu_{M-1}^{opt} = \mu_{min}$, $\mu_2^{opt} = \mu_4^{opt} = \dots = \mu_M^{opt} = \mu_{max}$. При этом значение $J_i(\mathbf{m}^{opt})$ изменяется от $1.74 \cdot 10^{-2}$ при $M=2$ до значения $5.83 \cdot 10^{-5}$ при $M=16$ (см. табл. 1), отвечающего высокой экранирующей эффективности. Что касается задачи маскировки, то для ее оптимального решения \mathbf{m}^{opt} аналог свойства релейности справедлив для всех управлений, кроме последнего μ_M^{opt} , а значение $J(\mathbf{m}^{opt})$ изменяется от $2.28 \cdot 10^{-2}$ при $M=2$ до $2.44 \cdot 10^{-6}$ при $M=16$ (см. табл. 2), отвечающего высокой маскировочной эффективности.

Таблица 1 — Задача экранирования: $\mu_{min} = 0.0045$, $\mu_{max} = 40$, $\mu_{max}/\mu_{min} = 8889$, $\mathbf{m}^{opt} = \mathbf{m}^{alt}$; \Leftrightarrow свойство релейности.

M	μ_1^{opt}	μ_M^{opt}	$J_i(\mathbf{m}^{opt})$
2	0.0045	40	$1.74 \cdot 10^{-2}$
4	0.0045	40	$1.88 \cdot 10^{-3}$
8	0.0045	40	$2.22 \cdot 10^{-4}$
12	0.0045	40	$9.02 \cdot 10^{-5}$
16	0.0045	40	$5.83 \cdot 10^{-5}$

Таблица 2 — Задача маскировки: $\mu_{min} = 0.0045$, $\mu_{max} = 70$, $\mu_{max}/\mu_{min} = 15556$, $\mathbf{m}^{opt} = \mathbf{m}^{alt}$ кроме μ_M^{opt} ; \Leftrightarrow почти свойство релейности.

M	μ_1^{opt}	μ_M^{opt}	$J(\mathbf{m}^{opt})$
2	0.0045	9.18	$2.28 \cdot 10^{-2}$
4	0.0045	17.92	$8.63 \cdot 10^{-4}$
8	0.0045	33.21	$2.96 \cdot 10^{-5}$
12	0.0045	46.27	$5.85 \cdot 10^{-6}$
16	0.0045	57.93	$2.44 \cdot 10^{-6}$

Подчеркнем, что указанным оптимальным решениям (задач экранирования и маскировки) отвечают легко реализуемые высокоэффективные (при $M \geq 12$) экранирующие оболочки, состоящие из чередующихся слоев, заполненных метаматериалом с $\mu = 0.0045$ и закаленной нержавеющей сталью с $\mu = 40$ в случае задачи экранирования, либо состоящие из $M - 1$ чередующихся слоев, заполненных метаматериалом с $\mu = 0.0045$ и кобальтом с $\mu = 70$, и последнего слоя, заполненного метаматериалом, отвечающим последнему оптимальному управлению μ_M^{opt} , в случае задачи маскировки. Приведенные на рис. 4 графики подтверждают высокую точность и эффективность разработанного итерационного алгоритма.

Следующие два теста относятся к задачам экранирования и маскировки для пар $(\mu_{min}, \mu_{max}) = (0.08, 20)$ и $(0.02, 50)$, соответственно, причем для сценария, когда все слои заполняются анизотропными средами. Как показано в разд. 2.6 диссертации, найденные с помощью МРЧ оптимальные значения $\mu_{rm}^{opt}, \mu_{\theta m}^{opt}$ магнитных проницаемостей, приведенные

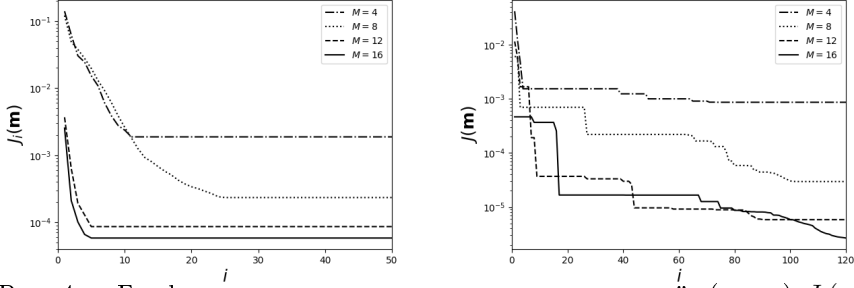


Рис. 4 — Графики зависимости минимальных значений: (слева) $J_i(\mathbf{m}^{opt})$ функционала J_i из табл. 1; (справа) $J(\mathbf{m}^{opt})$ функционала J из табл. 2, от номера итерации i для различных случаев $M = \{2, 4, 6, 8\}$.

в табл. 2.9–2.11, удовлетворяют соотношениям $\mu_{rm}^{opt} = \mu_{min}$, $\mu_{\theta m}^{opt} = \mu_{max}$ при любом $M = \overline{1, 16}$. Это означает, что все слои заполнены одной и той же анизотропной средой с магнитными проницаемостями $\mu_r^{opt} = \mu_{min}$, $\mu_{\theta}^{opt} = \mu_{max}$. При этом для теста, отвечающего контрасту $\mu_{max}/\mu_{min} = 250$, выполняются соотношения $J_i(\mathbf{m}^{opt}) = 3.62 \cdot 10^{-2}$ и $J(\mathbf{m}^{opt}) = 1.91 \cdot 10^{-2}$, тогда как для теста, отвечающего контрасту $\mu_{max}/\mu_{min} = 2500$, выполняются соотношения $J_i(\mathbf{m}^{opt}) = 1.78 \cdot 10^{-5}$ и $J(\mathbf{m}^{opt}) = 8.92 \cdot 10^{-6}$, соответствующие достаточно высоким экранирующим и маскировочным эффективностиам.

В главе 3 численно исследуются обратные задачи для трехмерной модели магнитостатики, возникающие при проектировании осесимметричных многослойных экранирующих и маскировочных устройств, в случае однородного внешне приложенного магнитного поля $\mathbf{H}_a = -\nabla\Phi_a$. Рассматривается физический сценарий, когда в пространство \mathbb{R}^3 , заполненное однородной изотропной средой, вносится сферическая оболочка $\Omega = \{a < r < b\}$, состоящая из конечного числа сферических слоев $\Omega_m = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : R_{m-1} < r < R_m\}$, $m = \overline{1, M}$, одинаковой ширины $d = (b - a)/M$. Предполагается, что каждый из этих слоев заполнен однородной анизотропной средой с постоянной магнитной проницаемостью в виде тензора $\boldsymbol{\mu}_m = \text{diag}(\mu_{rm}, \mu_{\theta m}, \mu_{\theta m})$, $\mu_{rm}, \mu_{\theta m} > 0$, $m = \overline{1, M}$. Вводятся два множества: $\Omega_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| < a\}$ и $\Omega_e^\infty = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| > b\}$. Пусть $\Phi_m = (\Phi_a + \Phi_s)|_{\Omega_m}$, $m = 0, M + 1$, $\Omega_{M+1} = \Omega_e^\infty \cap B_R$, где Φ_s — дополнительное поле.

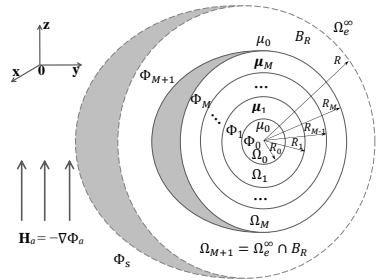


Рис. 5 — Геометрия 3D слоистой маскировочной анизотропной оболочки и схематическое распределение магнитного поля.

Для описанного физического сценария прямая задача магнитостатики сводится к нахождению функций Φ_m , $m = 0, M$, в областях Ω_m и Φ_s в

Ω_e^∞ (см. рис. 5), удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$\Delta\Phi_0 = 0 \text{ в } \Omega_0, \quad \operatorname{div}(\boldsymbol{\mu}_m \nabla \Phi_m) = 0 \text{ в } \Omega_m, \quad \Delta\Phi_s = 0 \text{ в } \Omega_e^\infty, \quad (24)$$

$$\Phi_m = \Phi_{m+1}, \quad \mu_{rm} \frac{\partial \Phi_m}{\partial r} = \mu_{r(m+1)} \frac{\partial \Phi_{m+1}}{\partial r} \quad \text{при } r = R_m, \quad m = \overline{0, M}, \quad (25)$$

$$\Phi_0(\mathbf{x}) = O(1) \text{ при } r = |\mathbf{x}| \rightarrow 0, \quad \Phi_s(\mathbf{x}) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (26)$$

Пусть $\Phi[\mathbf{m}] = (\Phi_0[\mathbf{m}], \Phi_1[\mathbf{m}], \dots, \Phi_M[\mathbf{m}], \Phi_{M+1}[\mathbf{m}])$ – решение задачи сопряжения (24)–(26), отвечающее $2M$ -мерному вектору $\mathbf{m} = (\mu_{r1}, \mu_{\theta1}, \dots, \mu_{rM}, \mu_{\theta M})$, составленному из компонент $\mu_{rm}, \mu_{\theta m}$ тензоров $\boldsymbol{\mu}_m, m = \overline{1, M}$. Решение в виде $M+2$ полей $\Phi_m, m = \overline{0, M+1}$ можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \Phi_0(r, \theta) &= (A_0 r / b) \cos \theta \text{ в } \Omega_0, \\ \Phi_m(r, \theta) &= ((r/b)^{\nu_m} A_m + (b/r)^{\nu_m+1} B_m) \cos \theta \text{ в } \Omega_m, \quad m = \overline{1, M}, \\ \Phi_{M+1}(r, \theta) &= (-H_a r / b + B_{M+1} (b/r)^2) \cos \theta \text{ в } \Omega_e^\infty. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь ν_m – коэффициент (степень) анизотропии среды в слое Ω_m , определяемый формулой $\nu_m = \sqrt{0.25 + 2(\mu_{\theta m} / \mu_{rm})} - 0.5, m = \overline{1, M}; H_a = \text{const}; b = R_M$; и $A_0, A_m, B_m, B_{M+1}, m = \overline{1, M}$, – неизвестные константы, которые могут быть определены из условий (25), образующих систему $2M+2$ линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} A_0 - A_1 c_0^{1-\nu_1} - B_1 c_0^{2+\nu_1} &= 0, \quad \mu_{r0} A_0 - \mu_{r1} A_1 \nu_1 c_0^{1-\nu_1} + \mu_{r1} B_1 (\nu_1 + 1) c_0^{2+\nu_1} = 0, \\ -A_m c_m^{-\nu_m} - B_m c_m^{\nu_m+1} + A_{m+1} c_m^{-\nu_{m+1}} + B_{m+1} c_m^{\nu_{m+1}+1} &= 0, \\ -\mu_{rm} A_m \nu_m c_m^{1-\nu_m} + \mu_{rm} B_m (\nu_m + 1) c_m^{2+\nu_m} + \mu_{r(m+1)} A_{m+1} \nu_{m+1} c_m^{1-\nu_{m+1}} - \\ -\mu_{r(m+1)} B_{m+1} (\nu_{m+1} + 1) c_m^{2+\nu_{m+1}} &= 0, \quad m = \overline{1, M-1}, \quad c_m = b / R_m, \\ -A_m - B_m + B_{m+1} &= H_a, \\ -\mu_{rM} A_M \nu_M + \mu_{rM} B_M (\nu_M + 1) - 2\mu_{r(M+1)} B_{M+1} &= \mu_{r(M+1)} H_a. \end{aligned} \quad (28)$$

Для решения трехмерных аналогов задач (19) применяется оптимизационный метод, в соответствии с которым вводятся множество управлений

$$K = \{\mathbf{m} = (\mu_{r1}, \mu_{\theta1}, \dots, \mu_{rM}, \mu_{\theta M}) \in \mathbb{R}^{2M} : 0 < \mu_{min} \leq \mu_{rm}, \mu_{\theta m} \leq \mu_{max}\}$$

и трехмерные аналоги функционалов (21). Далее, в главе 3 формулируются трехмерные аналоги экстремальных задач (22) и (23), для численного решения которых используется метод роя частиц (МРЧ).

Численное моделирование проводилось при следующих значениях параметров: $a \equiv R_0 = 0.04\text{м}$, $b \equiv R_M = 0.05\text{м}$, $R = \{0.7, 3\}\text{м}$, $\mu_0 = \mu_{M+1} = 1$; $(\mu_{min}, \mu_{max}) = (0.02; 20)$ и $(0.0045; 70)$. Кроме того, $\mathbf{H}_a = -\nabla \Phi_a$, где $\Phi_a(r, \theta) = -H_a r \cos \theta$, $H_a = |\mathbf{H}_a| = 1\text{А/м}$, $d = (b - a) / M$, $L = 120$, $N = 25$.

Первая пара тестов относится к задачам экранирования и маскировки для пары $(\mu_{min}, \mu_{max}) = (0.0045, 70)$ в изотропном случае. Полученные решения детально описаны в разд. 3.4 диссертации и приведены ниже в табл. 3 и 4. Как и в 2D случае, для оптимальных решений 3D задачи экранирования справедлив аналог свойства релейности относительно пары (μ_{min}, μ_{max}) , тогда как для оптимальных решений задачи маскировки аналог свойства релейности справедлив для всех управлений, кроме последнего μ_M^{opt} . Указанным оптимальным решениям соответствуют легко реализуемые высокоэффективные (при $M \geq 6$) экранирующие или маскировочные оболочки, состоящие из чередующихся M слоев, заполненных

метаматериалом и кобальтом в случае задачи экранирования, либо состоящие из $M-1$ чередующихся слоев, заполненных метаматериалом и кобальтом, и последнего слоя, заполненного метаматериалом, отвечающим последнему оптимальному управлению μ_M^{opt} для задачи маскировки.

Таблица 3 — Задача экранирования: $\mu_{min}=0.0045$, $\mu_{max}=70$, $\mu_{max}/\mu_{min}=15556$, $\mathbf{m}^{opt}=\mathbf{m}^{alt} \Leftrightarrow$ свойство релейности.

M	μ_1^{opt}	μ_M^{opt}	$J_i(\mathbf{m}^{opt})$
2	70	0.0045	$4.97 \cdot 10^{-3}$
4	70	0.0045	$1.87 \cdot 10^{-4}$
8	70	0.0045	$3.54 \cdot 10^{-6}$
12	70	0.0045	$3.73 \cdot 10^{-7}$
16	70	0.0045	$9.48 \cdot 10^{-8}$

Таблица 4 — Задача маскировки: $\mu_{min}=0.0045$, $\mu_{max}=70$, $\mu_{max}/\mu_{min}=15556$, $\mathbf{m}^{opt}=\mathbf{m}^{alt}$ кроме $\mu_M^{opt} \Leftrightarrow$ почти свойство релейности.

M	μ_1^{opt}	μ_M^{opt}	$J(\mathbf{m}^{opt})$
2	70	0.0045	$3.18 \cdot 10^{-3}$
4	0.0045	9.2573	$4.76 \cdot 10^{-4}$
8	0.0045	16.8218	$5.01 \cdot 10^{-6}$
12	0.0045	23.0119	$3.92 \cdot 10^{-7}$
16	0.0045	28.1617	$8.34 \cdot 10^{-8}$

Следующий тест относится к задачам экранирования и маскировки для пары $(\mu_{min}, \mu_{max}) = (0.02, 20)$ для сценария, когда все слои заполняются анизотропными средами. Найденные с помощью МРЧ оптимальные значения $\mu_{rm}^{opt}, \mu_{\theta m}^{opt}$ магнитных проницаемостей приведены вместе с соответствующими значениями $J_i(\mathbf{m}^{opt})$ и $J(\mathbf{m}^{opt})$ в табл. 5. Видно, что при любом $M = \overline{1,16}$ выполняются соотношения $\mu_{rm}^{opt} = \mu_{min}$, $\mu_{\theta m}^{opt} = \mu_{max}$, означающие, что все слои заполнены одной и той же анизотропной средой с магнитными проницаемостями $\mu_r^{opt} = \mu_{min}$, $\mu_\theta^{opt} = \mu_{max}$.

Таблица 5 — Задачи экранирования и маскировки: $\mu_{min} = 0.02$, $\mu_{max} = 20$, контраст $= \mu_{max}/\mu_{min} = 1000$, $\nu_m = 44.22$, $m = \overline{1, M}$.

M	$(\mu_{rm}^{opt}, \mu_{\theta m}^{opt}), m = \overline{1,16}$	$J_i(\mathbf{m}^{opt})$	$J(\mathbf{m}^{opt})$
1	(0.02, 20)		
4	(0.02, 20)		
8	(0.02, 20)	$6.32 \cdot 10^{-5}$	$6.34 \cdot 10^{-5}$
12	(0.02, 20)		
16	(0.02, 20)		

Выполненный оптимизационный анализ показал, что высокая эффективность проектируемых устройств магнитной маскировки и экранирования может быть достигнута при использовании как однослойных анизотропных оболочек с высоким коэффициентом анизотропии, так и многослойных изотропных оболочек, состоящих из нескольких изотропных кольцевых или сферических слоев Ω_m , $m = \overline{1, M}$, каждый из которых заполнен однородной средой с постоянной магнитной проницаемостью $\mu_m > 0$. Значения указанных магнитных проницаемостей μ_m всех слоев находят с помощью разработанного численного алгоритма на основе МРЧ.

В случае изотропных оболочек построенные оптимальные решения \mathbf{m}^{opt} обладают свойством релейности, согласно которому для любого числа слоев M каждая компонента μ_m^{opt} оптимального решения \mathbf{m}^{opt} (кроме последней компоненты μ_m^{opt} для задачи маскировки) принимает одно из

двух значений μ_{min} и μ_{max} , являющихся границами множества управлений K . Это позволяет сделать важный вывод о том, что разработанный в диссертации оптимизационный алгоритм позволяет построить оптимальные решения задач экранирования и маскировки, которым при надлежащем выборе множества K отвечают высокоэффективные экранирующие и маскировочные оболочки, обладающие простотой технической реализации.

В **заключении** приведены основные результаты работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Доказана однозначная разрешимость новых краевых задач с условиями сопряжения для двумерных и трехмерных моделей магнитостатики.

2. Разработан математический аппарат решения задач дизайна средств маскировки и экранирования материальных тел относительно магнитных полей, основанный на оптимизационном методе решения обратных задач.

3. На основе разработанного математического аппарата и метода роя частиц предложены и исследованы эффективные численные алгоритмы решения задач дизайна устройств маскировки и экранирования для 2D и 3D моделей магнитостатики.

4. Разработан комплекс программ, реализующих предложенные численные алгоритмы, на основе которого проведены вычислительные эксперименты по решению задач дизайна устройств маскировки и экранирования для 2D и 3D моделей магнитостатики. С помощью проведенных вычислительных экспериментов установлены важные свойства оптимальных решений и отвечающих им маскировочных и экранирующих оболочек. Одним из таких свойств является свойство релейности, использование которого позволяет проектировать маскировочные оболочки, обладающие высокой эффективностью и простотой технической реализации.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России

1. Алексеев, Г. В. Оптимизационный метод в задачах акустической маскировки материальных тел / Г. В. Алексеев, А. В. Лобанов, Ю. Э. Спивак // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2017. – Т. 57, № 9. – С. 1477–1493.

2. Алексеев, Г. В. Теоретический анализ задачи магнитной маскировки на основе оптимизационного метода / Г. В. Алексеев, Ю. Э. Спивак // Дифф. уравнения. – 2018. – Т. 54, № 9. – С. 1155–1166.

3. Лобанов, А. В. Оптимизационный метод в двумерных задачах электрической маскировки / А. В. Лобанов, Ю. Э. Спивак // Дальневосточный математический журнал. – 2019. – Т. 19, № 1. – С. 31–42.

4. Спивак, Ю. Э. Оптимизационный метод в двумерных задачах магнитной маскировки / Ю. Э. Спивак // Сиб. электрон. матем. изв. – 2019. – Т. 16. – С. 812–825.

5. Алексеев, Г. В. Численный анализ двумерных задач магнитной маскировки на основе оптимизационного метода / Г. В. Алексеев, Ю. Э. Спивак // Дифф. уравнения. – 2020. – Т. 56, № 9. – С. 1252–1262.

6. Алексеев, Г. В. Численный анализ трехмерных задач магнитной маскировки на основе оптимизационного метода / Г. В. Алексеев, Ю. Э. Спивак // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2021. – Т. 61, № 2. – С. 224–238.

В изданиях материалов конференций, индексируемых международными базами научного цитирования Scopus и Web of Science

7. Alekseev, G. V. Numerical analysis of 2D cloaking problem using multilayered materials / G. V. Alekseev, Y. E. Spivak // Proceedings of Meetings on Acoustics (POMA). – 2015. – Vol. 24, № 1. – P. 070009.

8. Alekseev, G. V. Numerical analysis of 2D cloaking problem using homogeneous materials / G. V. Alekseev, Y. E. Spivak, A. V. Lobanov // J. Key engineering materials. – 2016. – Vol. 685. – P. 56–59.

9. Alekseev, G. V. Analysis of the 3D acoustic cloaking problems using optimization method / G. V. Alekseev, Y. E. Spivak // Journal of Physics: Conference Series. – 2016. – Vol. 722, № 1. – 012002(6).

10. Alekseev, G. V. Optimization and discretization in 2D problems of electromagnetic invisible cloaking / G. V. Alekseev, A. V. Lobanov, Y. E. Spivak // CEUR Workshop Proceedings. – 2016. – Vol. 1623. – P. 125–137.

11. Alekseev, G. V. Modeling and optimization in cloaking problems for Maxwell equation / G. V. Alekseev, A. V. Lobanov, Y. E. Spivak // Proceedings of the 18th International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA). – 2016. – Vol. 7731422. – P. 442–445.

12. Alekseev, G. V. Theoretical analysis of the 2D thermal cloaking problem / G. V. Alekseev, Y. E. Spivak, E. N. Yashchenko // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – Vol. 803, № 1. – 012001(6).

13. Alekseev, G. V. Control approach in inverse problems for time-harmonic Maxwell equations under mixed boundary conditions / G. V. Alekseev, R. V. Brizitskii, Y. E. Spivak // Proceedings of the Progress In Electromagnetics Research Symposium – Spring (PIERS). – 2017. – P. 354–358.

14. Lobanov, A. V. Numerical analysis of problem of designing magnetic bilayer cloak / A. V. Lobanov, Y. E. Spivak // Progress In Electromagnetics Research Symposium - Spring (PIERS). – 2017. – P. 1362–1366.

15. Spivak, Y. E. Optimization method in static magnetic cloaking problem / Y. E. Spivak // Proceedings of the Progress In Electromagnetics Research Symposium - Spring (PIERS). – 2017. – P. 1327–1331.

16. Optimization method in 3D static magnetic cloaking problems / G. V. Alekseev [et al.] // Proceedings of the 19th International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA). – 2017. – Vol. 8065487. – P. 1212–1215.

17. Alekseev, G. V. Optimization analysis of a 2D magnetic cloaking problem for bilayer structure / G. V. Alekseev, Y. E. Spivak // In: Beilina L., Smirnov Y. (eds) Nonlinear and Inverse Problems in Electromagnetics. PIERS 2017. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. Springer, Cham. – 2018. – Vol. 243. – P. 11–18.

18. Spivak, Y. E. Theoretical and numerical analysis of the magnetic cloaking problem / Y. E. Spivak, A. V. Lobanov, D. A. Tereshko // Proceedings of the Progress in Electromagnetics Research Symposium - August (PIERS). – 2018. – № 8597973. – P. 1609–1616.

19. Optimization-based analysis of inverse problems of designing magnetic cloaking and shielding devices / G. V. Alekseev [et al.] // Proceedings of the 21st International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA). – 2019. – № 8879234. – P. 95–98.

20. Alekseev, G. V. Modeling and computer design of magnetic invisibility devices / G. V. Alekseev, Y. E. Spivak, V. I. Silchenko // Proceedings of the International multidisciplinary conference on industrial engineering and modern technologies (FarEastCon). – 2020. – P. 1–6.

21. Lobanov, A. V. Optimization method of solving 2D problems of designing DC electric shields and cloaks / A. V. Lobanov, Y. E. Spivak, P. Savinov // In: Solovev, D.B., Kyriakopoulos, G.L., Venelin, T. (eds) SMART Automatics and Energy. Smart Innovation, Systems and Technologies, Springer, Singapore. – 2022. – Vol. 272. – P. 591–598.

В сборниках материалов и тезисов конференций, индексируемых в РИНЦ

22. Spivak, Y. E. Numerical analysis of 2D approximate cloaking problem using isotropic multilayered cloak / Y. E. Spivak // 3rd FEFU SNS Students, Master's degree and Postgraduate students Scientific-Practical Conference in english: Conference proceedings. – Vladivostok: Far Eastern Federal University. – 2016. – P. 46–48.

23. Спивак, Ю. Э. Численный анализ 2D модели приближенной электромагнитной маскировки с применением слоистых материалов / Ю. Э. Спивак // Материалы Региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам, 15-30.04.2016 г.- Владивосток: ДВФУ. – 2016. – С. 266–267.

24. Алексеев, Г. В. Оптимизационный анализ задач маскировки материальных тел на основе метода роя частиц / Г. В. Алексеев, А. В. Лобанов, Ю. Э. Спивак // Технические проблемы освоения Мирового океана: материалы 7 Всероссийской научно-технической конференции, 2–6.10.2017 г. - Владивосток: ИПМТ ДВО РАН. – 2017. – С. 455–460.

25. Спивак, Ю. Э. Анализ решения задачи дизайна магнитной маскировочной оболочки с помощью слоистой структуры / Ю. Э. Спивак // Материалы Региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам, 15-30.04.2019 г.- Владивосток: ДВФУ. – 2019. – С. 289–290.

26. Spivak, Y. E. Theoretical study of 3D cloaking problem for bilayer magnetic structure / Y. E. Spivak // *Mathematical Modeling in Electrodynamics: Theory, Methods and Applications: abstracts of international scientific conference*. ed. Yu. G. Smirnov. September 23-27, 2019 - Penza: Penza State University. – 2019. – P. 99.

27. Алексеев, Г. В. Численный анализ задач маскировки материальных тел на основе оптимизационного метода / Г. В. Алексеев, А. В. Лобанов, Ю. Э. Спивак // *Технические проблемы освоения Мирового океана: материалы 8 Всероссийской научно-технической конференции*, 30.09–3.10.2019 г. – Владивосток: ИПМТ ДВО РАН. – 2019. – С. 250–256.

Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ

28. Алексеев, Г. В. Численное решение двумерной задачи электромагнитной маскировки с использованием многослойной цилиндрической оболочки / Г. В. Алексеев, А. В. Лобанов, Ю. Э. Спивак // *Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015663062* (дата регистрации 09.12.2015 г.)

29. Алексеев, Г. В. Численное решение задачи электромагнитной маскировки круглого цилиндра с использованием ИЭМП слоя / Г. В. Алексеев, А. В. Лобанов, Ю. Э. Спивак // *Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2016614892* (дата регистрации 11.05.2016 г.)

30. Вычисление координат датчика в поле постоянного магнита по кинематическим и магнитным данным / А. В. Огнев [и др.] // *Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2019666598* (дата регистрации 12.12.2019 г.)

31. Алексеев, Г. В. Численное решение двумерной задачи магнитостатической маскировки с использованием многослойной оболочки / Г. В. Алексеев, Ю. Э. Спивак // *Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2021661442* (дата регистрации 12.07.2021 г.)

32. Спивак, Ю. Э. Численное решение обратной задачи дизайна сферической магнитной маскировочной оболочки / Ю. Э. Спивак // *Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2021661462* (дата регистрации 12.07.2021 г.)

Спивак Юлия Эдуардовна

Оптимизационные методы решения задач дизайна устройств маскировки для моделей магнитостатики

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 30.01.2023. Заказ № 19.

Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Отпечатано в ФГБУН Институте прикладной математики ДВО РАН
690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7